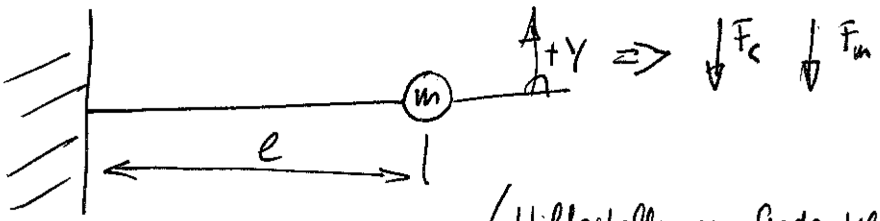
TECHNISCHE DYNAMIK I
LÖSUNG ZUR ÜBUNGSAUFGABE VOM 25.06.07

Skizze:



(Hilfestellung: Gedanklich die Masse m in pos. y-Richtung auslenken. → F_c und F_m sind dann entsprechend entgegengesetzt gerichtet anzusetzen.)

① Masse freigeschnitten:

$\sum F = 0 \Rightarrow F_c + F_m = 0$

$F_m = m \cdot \ddot{y}$; $F_c = 3 \cdot \frac{E \cdot I}{l^3}$ ($E \cdot I$: Biegesteifigkeit)

↳ DGL: $\boxed{\ddot{y} + 3 \cdot \frac{E \cdot I}{m l^3} \cdot y = 0}$

oder $\ddot{y} + \omega^2 \cdot y = 0$ mit $\omega^2 = 3 \frac{E \cdot I}{l^3 m}$

② Lösung durch Exponentialansatz:*

$y_{(t)} = e^{\lambda \cdot t}$; $\dot{y}_{(t)} = \lambda \cdot e^{\lambda t}$; $\ddot{y}_{(t)} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

Charakteristische Gleichung:

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$

↳ $\lambda_{1/2} = \pm i \omega$

Allgemeine Lösung der DGL lautet damit:

$y_{(t)} = C_1 \cdot e^{i\omega t} + C_2 \cdot e^{-i\omega t}$

---

* Eine Fundamentalbasis der homogenen DGL. 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten vom Typ $\ddot{y} + a \cdot \dot{y} + b \cdot y = 0$ lässt sich durch einen Lösungsansatz in Form einer Exponentialfunktion vom Typ $y = e^{\lambda t}$ gewinnen.

Integrationskonstanten C_1 und C_2 bestimmen mit:

$$Y_{(0)} = Y_0 \quad \text{und} \quad \dot{Y}_{(0)} = 0 \, ;$$

$$\hookrightarrow \quad \underline{Y_0 = C_1 + C_2}$$

$$\dot{Y}_{(t)} = C_1 \, i\omega \cdot e^{i\omega t} + C_2 \cdot (-i\omega) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\hookrightarrow \dot{Y}_{(0)} = 0 \rightarrow C_1 \cdot i\omega - C_2 \cdot i\omega = 0 \rightarrow \underline{C_1 = C_2}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = C_2 = \frac{Y_0}{2}$$

damit ergibt $Y_{(t)} = \frac{Y_0}{2} \cdot e^{i\omega t} + \frac{Y_0}{2} \cdot e^{-i\omega t}$

mit "EULER FORMEL"

$$\hookrightarrow Y_{(t)} = C_1 \left[\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t) \right] + C_2 \cdot \left[\cos(\omega t) - i \cdot \sin(\omega t) \right]$$

$$\hookrightarrow Y_{(t)} = (C_1 + C_2) \cdot \cos(\omega t) + (C_1 - C_2) \cdot \sin(\omega t)$$

$$\hookrightarrow Y_{(t)} = \left(\frac{Y_0}{2} + \frac{Y_0}{2} \right) \cdot \cos(\omega t)$$

$$\hookrightarrow Y_{(t)} = Y_0 \cdot \cos\left(\underbrace{\sqrt{3 \cdot \frac{E \cdot I}{e^3 \cdot m}}}_{\omega \text{ "Eigenkreisfrequenz"}} \, t \right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m \cdot e^3}{3EI}}$$